6. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

6.1 Laplace Dönüşümü Tanımı

Lineer dif. denklemleri çözmek için kullanılan önemli araçlardan biri integral dönüşümleridir. Verilen bir f fonksiyonunu başka bir F fonksiyonuna dönüştüren

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta} k(s,t)\,f(t)\,dt$$

formundaki bağıntıya bir <u>integral dönüşümü</u> denir. F'ye f'in dönüşümü, k fonksiyonuna da dönüşümün <u>çekirdeği</u> denir. Bu dönüşümdeki temel amaç f için bir problemi

F için daha basit olan bir probleme dönüştürmektir.

$t\geq 0$ için $f(t)$ biraz sonra vereceğimiz şartları sağlayan verilen bir fonksiyon olsun. f'in <u>Laplace dönüşümü</u> $\mathcal{L}\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \qquad (6.1)$$

olarak tanımlanır. Bu dönüşümün çekirdeği $k(s,t)=e^{-st}$ dir.

Laplace dönüşümü 0'dan ∞'a integral ile tanımlandığından genelleştirilmiş integrallere tekrar bir göz atalım. Sınırsız aralıkta genelleştirilmiş integral

$$\int_a^\infty f(t)\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t)\,dt$$

ile tanımlanır. Eğer her $A>a$ için a'dan A'ya integral ve $A\to\infty$ için limit varsa genelleştirilmiş integrale yakınsak denir. Diğer durumda ıraksak denir.

<u>Örnek</u>: $f(t)=e^{ct}$, $t\geq 0$ olsun. ($c\neq 0$ reel bir sabit)
$\int_0^\infty f(t)\,dt$ yakınsak mıdır?

$$\int_0^\infty e^{ct}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{ct}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{c}e^{ct}\Big|_0^A$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{c}e^{cA}-\frac{1}{c}\right)$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{c}, & c<0\\ \infty, & c>0\end{cases}$$

$c<0$ ise yakınsak, $c\geq 0$ ise genelleştirilmiş integral ıraksaktır. ($c=0$ için $\int_0^\infty 1\,dt=\lim_{A\to\infty}A=\infty$)

2) $f(t)=\frac{1}{t}$, $t\geq 1$ olsun.

$$\int_1^\infty f(t)\,dt=\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{t}\,dt=\lim_{A\to\infty}\ln t\Big|_1^A$$

$$=\lim_{A\to\infty}\ln A=\infty$$

genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

3) $f(t)=\frac{1}{t^p}$, $p\neq 1$, $t\geq 1$

$$\int_1^\infty t^{-p}dt=\lim_{A\to\infty}\int_1^A t^{-p}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}t^{1-p}\Big|_1^A$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}A^{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

$p > 1$ ise yakınsak $p \leq 1$ ise ıraksaktır.

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ ile benzer} \right)$

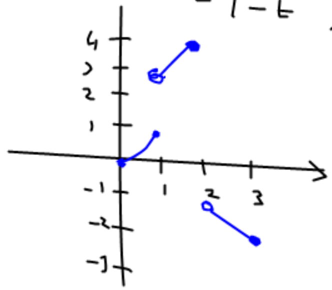
f, fonksiyonu, $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında aşağıdaki şartları sağlayan n tane $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ alt aralıklara bölünebilirse, parçalı sürekli denir.

1) f fonksiyonu her açık alt aralık $t_{i-1} < t < t_i$ de süreklidir.

2) f, alt aralıkların uç noktalarında sonlu limite sahiptir.

Diğer bir doğişle $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında sonlu sayıda sıçramalı süreksizlik haricinde sürekli fonksiyona parçalı sürekli denir.

Örnek: $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 1-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$



Eğer f, $a \leq t \leq A$ aralığında parçalı sürekli ise $\int_a^A f(t)\,dt$ vardır. Eğer f fonksiyonu $t \geq a$ için parçalı sürekli ise her $A \geq a$ için $\int_a^A f(t)\,dt$ vardır. Fakat bu $\lim_{A \to \infty} \int_a^A f(t)\,dt$ 'nin sonlu olmasını garanti etmiyor.

Teorem: $t \geq a$ için f, parçalı sürekli, bir pozitif M sayısı için $t \geq M$ olduğunda $|f(t)| < g(t)$ ve $\int_M^{\infty} g(t)\,dt$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ 'de yakınsaktır. $t \geq M$ için $0 \leq g(t) \leq f(t)$ ve $\int_M^{\infty} g(t)\,dt$ ıraksak ise $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ ıraksaktır.

Laplace dönüşümünün olması için f'in sağlaması gereken koşullar aşağıdaki teoremdedir.

Teorem: Eğer

a) herhangi pozitif A değeri için $0 \leq t \leq A$ aralığında f parçalı sürekli

b) $t \geq M$ için $|f(t)| \leq K e^{at}$, burada K ve M pozitif olmak üzere K, a, M reel sabitler ise

$s > a$ için (6.1) ile tanımlanan Laplace dönüşümü vardır.

Kanıt:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\left| e^{-st} f(t) \right| = e^{-st} |f(t)| \leq e^{-st} \cdot k \cdot e^{at} \qquad t \geq M$$

$$k \int_M^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at}\,dt = k \int_M^{\infty} e^{(a-s)t}\,dt \qquad a-s<0 \text{ ise yakınsak.}$$

$s > a$ için $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ vardır.

Örnek: 1) $f(t) = 1$, $t \geq 0$ ise $\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^A \right) = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sA} + \frac{1}{s} \right)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

2) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0 \qquad \mathcal{L}\{e^{at}\} = ?$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)A} - \frac{1}{a-s} \right)$$

$$= \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

3) $f(t) = \cos at, \quad t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = ?$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cos at\, dt$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \cos at & dv = e^{-st}\, dt \\ du = -a \sin at\, dt & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \cos at \Big|_0^A - \frac{a}{s} \int_0^A e^{-st} \sin at \right) \qquad \left[\begin{array}{ll} u = \sin at & dv = e^{-st} dt \\ du = a \cos at & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \sin at \Big|_0^A + \frac{a}{s} \underbrace{\int_0^A e^{-st} \cos at}_{F(s)} \right)$$

$$F(s) \left[1 + \frac{a^2}{s^2} \right] = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$